INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractère éducatif
Établissement libre d'enseignement supérieur

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

MATHÉMATIQUES I

(Option générale)

DURÉE : 4 heures – COEFFICIENT : 5

PREMIÈRE PARTIE

k étant un réel positif, on considère la famille de fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$x>0\ f_k(x) = x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$

et $f_k(0) = 0$ si $k>0$, $f_0(0) = 1$

La représentation graphique de f_k sera notée (C_k).

1°) Étude locale en 0

a) f_k est-elle continue en 0 ?

b) f_k est-elle dérivable en 0 ?

c) Préciser la forme de (C_k) au voisinage du point d'abscisse nulle.

2°) Étude des intervalles de monotonie de f_k.

a) Montrer que, pour $x>0$, f_k est dérivable et étudier le signe de f'_k.

b) Montrer que f_k admet un extremum ; on notera M_k le point correspondant de (C_k).

3°) Étude au voisinage de $+\infty$

Étudier la limite de f_k lorsque x tend vers $+\infty$; conclure sur la forme de branche infinie correspondante pour (C_k).

4°) Études complémentaires.

a) Quel est l'ensemble (L) des points M_k lorsque k parcourt $\mathbb{R}_+$?

b) Montrer que, pour $k>1$ (C_k) admet deux points d'inflexion et que, pour $0 \leqslant k \leqslant 1$ (C_k) admet un point d'inflexion.

c) Étudier pour $0 \leqslant k < m$ le signe de $f_m(x) - f_k(x)$ selon les valeurs de x et en déduire la position relative de (C_m) et (C_k).

5°) Représentation graphique.

On prend un repère orthonormé ; l'unité est de 5 cm.

a) Calculer à 10^{-1} près les coordonnées de M_0, $M_{1/2}$, M_1, M_2.

b) Représenter sur un même dessin (L), (C_0), $(C_{1/2})$, (C_1), (C_2).

Les candidats veilleront particulièrement au soin et à l'exactitude du dessin compte-tenu des renseignements obtenus dans les questions précédentes.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie k est un entier naturel.
E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur à 2. A tout polynôme p défini par :

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

l'on associe la matrice unicolonne P telle que $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

des composantes de p dans la base canonique de E.

1°) Montrer que, quel que soit le polynôme p, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} p(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente

2°) On pose alors, pour tout entier k, $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$.

Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1}. En déduire I_k.

3°) A tout polynôme p de E, on associe la fonction r définie par :

$$r(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2)\, e^{-t}\, p(t)\, dt$$

L'application $p \vdash r$ est visiblement un endomorphisme de E.
Quelle est la matrice A, de cet endomorphisme, dans la base canonique de E ?

4°) Chercher les valeurs propres de A et, pour chacune d'elles, préciser les polynômes constituant l'espace propre associé.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie k est toujours entier, mais appartient à l'ensemble des entiers $\{0, 1, 2\}$.

On donne une constante a réelle non nulle et une fonction q, continue sur $\mathbb{R}$, telle que, les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-at^2} q(t)\, dt$$ soient convergentes pour tout k.

On se propose de chercher les fonctions f vérifiant le système (S) de conditions suivantes :

i) f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

ii) Quel que soit k, l'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} f(t)\, dt$ converge.

iii) Pout tout x de $\mathbb{R}_+$: $f(x) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2)\, e^{-t} f(t) dt + q(x)$.

1°) On suppose dans cette question que q est la fonction nulle.

a) Montrer que, si f est solution de (S), f est nécessairement un élément de E.

b) Résoudre (S) à l'aide de la partie II.

On revient au cas général où q vérifie les conditions du préambule.

2°) Si f vérifie (S), quel système (S') vérifie la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f = q + g$

3°) Montrer que si g est solution de (S'), g est nécessairement un élément de E, dont on notera G la matrice unicolonne dans la base canonique de E.

4°) Montrer qu'alors G vérifie : $AG - aG = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

où y_0, y_1, y_2, sont 3 valeurs données par des intégrales impropres convergentes dépendant de la fonction q.

5°) Pour quelles valeurs de a, le système (S') puis le système (S) ont-ils une solution unique ?

6°) Pour b réel on pose $q(x) = e^{x-bx}$. Pour quelles valeurs de b la fonction q satisfait-elle aux conditions du préambule ?

Résoudre alors le système (S) dans le cas $a = -2$. On discutera selon les valeurs de b.

INSTITUT SUPERIEUR de GESTION
Opt. générale-Math 1